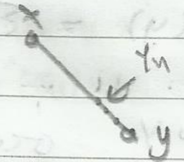
② Αν $x,y\in X$ με $\|x-y\|=\varepsilon>0$ τότε

α. $\exists (y_n)$ στο X με $\|x-y_n\|<\varepsilon$ με $y_n\to y$

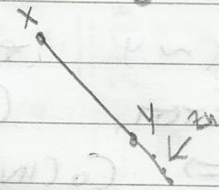
β. $\exists (z_n)$ στο X με $\|x-z_n\|>\varepsilon$ με $z_n\to y$

<u>Απόδ</u>



α) $y_n = x+(1-\frac{1}{n})(y-x) \xrightarrow{n\to\infty} x$

$\|y_n-x\| = (1-\frac{1}{n})\|y-x\| = (1-\frac{1}{n})\varepsilon<\varepsilon$



β) $z_n = x+(1+\frac{1}{n})(y-x)\to y$

$\|z_n-x\| = (1+\frac{1}{n})\varepsilon>\varepsilon$

Αν επίσης $x,y\in X$ με $\|x-y\|=\varepsilon>0$ τότε

γ. $\overline{S(x,\varepsilon)} = B(x,\varepsilon)$ και $(B(x,\varepsilon))^\circ = S(x,\varepsilon)$

ανοιχτή σφαίρα (+θήκη) κλειστή σφαίρα

<u>Απόδ</u>

Προφανώς $S(x,\varepsilon)\subset B(x,\varepsilon)$ και $B(x,\varepsilon)$ κλειστό
αφού $y\xrightarrow{\varphi}\|x-y\|$ συνεχής τότε το σύνολο
$B(x,\varepsilon)=\varphi^{-1}([0,\varepsilon])$ κλειστό.

Άρα, $\overline{S(x,\varepsilon)}\subset B(x,\varepsilon)$

Ο αντίστροφος εγκλεισμός: $B(x,\varepsilon)\subset\overline{S(x,\varepsilon)}$ προκύπτει ως εξής

Έστω $y\in B(x,\varepsilon)$ δηλ. $\|x-y\|\le\varepsilon$

• Αν $\|x-y\|<\varepsilon \Rightarrow y\in S(x,\varepsilon)\subset\overline{S(x,\varepsilon)}$

• Αν $\|x-y\|=\varepsilon$ από το (α) $(\exists y_n)$ στο X με $\|x-y_n\|<\varepsilon$ τ/ω $y_n\to y$

ΘΔΟ $B(x,\varepsilon)^\circ\subset S(x,\varepsilon) \Leftrightarrow X\setminus B(x,\varepsilon)^\circ \supset X\setminus S(x,\varepsilon)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{(X - B(x,\varepsilon))} \supseteq X - S(x,\varepsilon)$

Εστω $y \in X - S(x,\varepsilon) \Rightarrow \|y-x\| \geq \varepsilon$ και για το συμπερασμα χρησιμοποιειται το (β)

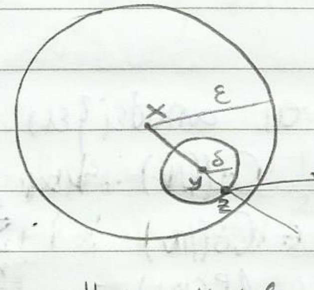
③ Εστω X χώρος με νόρμα

$x, y \in X$, και $\varepsilon, \delta > 0$ ωστε $B(y,\delta) \subset B(x,\varepsilon)$

Νδο $d(x,y) = \|x-y\| \leq \varepsilon - \delta$

Αποδ.

Θεωρώ $z = y + \delta \dfrac{y-x}{\|y-x\|}$



$$\|z-y\| = \left\|\delta \frac{y-x}{\|y-x\|}\right\| = \delta \frac{\cancel{\|y-x\|}}{\cancel{\|y-x\|}} = \delta$$

Αρα, $z \in B(y,\delta) \Rightarrow z \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow \|z-x\| \leq \varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\| y + \delta \frac{y-x}{\|y-x\|} - x \right\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|y-x\| \cdot \underbrace{\left(\frac{\delta}{\|y-x\|} + 1\right)}_{>0} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \delta + \|y-x\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|y-x\| \leq \varepsilon - \delta.$$

④ Εστω X χώρος με νορμα και $A, B \subset X$

i) Εαν A ανοιχτο τοτε νδο $A+B$ ανοιχτο

ii) $\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A+B}$

ΛΥΣΗ

i) $A+B = \bigcup\limits_{y \in B} (A+y)$

$\forall y \in X$ η συναρτηση $X \to X$ την $x \mapsto x+y$ είναι ομοιομορφισμος και αντίστροφη $X \to X$ την $x \mapsto x-y$

Οποτε , $\forall y \in B$ το $A+y$ είναι ανοιχτο

~~Τοτε~~ $A+B$ ανοιχτό ως ενωση ανοιχτων

ii) Εστω $x \in \overline{A}$ και $y \in \overline{B} \Rightarrow \exists\, x_n$ και y_n στο A και B αντοιστοιχα : $x_n \to x$ και $y_n \to y \Rightarrow x_n + y_n \to x+y \in \overline{A+B}$

ΟΡΙΣΜΟΣ (Σειρά)

Εστω X χωρος με νορμα και (x_n) ακολουθια στο X. Η ακολουθια $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $S_n=\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\forall n\in\mathbb{N}$ λεγεται σειρα στο X και συμβολιζεται με $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ αν συγκλινει η $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τα S_n λεγονται μερικά αθροισματα της σειρας. Λεμε ότι η σειρα συγκλινει προς ενα $x\in X$ και γραφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ οταν $S_n \to x$ δηλαδή $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i = x$, δηλαδη $\|\sum_{i=1}^{n} x_i - x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

ΠΧ

Απο τι αποδειξεις οτι το $\{e_1, e_2, \dots\}$ είναι ολικο στον $c_0(\mathbb{N})$ και στον $\ell^p(\mathbb{N})$ τοτε εχουμε οτι
$\forall x\in c_0(\mathbb{N}) : \sum^{\infty} x_n e_n = x$ και
$\forall x\in \ell^p(\mathbb{N}) : \sum_{n=1} x_n e_n = x$

Κριτήριο του Cauchy

Εστω $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ μια σειρα σε ενα χωρο Banach X. Τα ακολουθα είναι ισοδύναμα

i) η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλινει

ii) $(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N}) : \|\sum_{i=n}^{m} x_i\| < \varepsilon \quad \forall m\ge n\ge N$

Επεται $\|S_m - S_{n-1}\| < \varepsilon$

(Αποδειξη όπως στους πραγματικους αριθμους)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ λεγεται απολυτως συγκλινουσα οταν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty$.

Προταση

Εστω X χωρος με νορμα
X είναι χωρος Banach αν.ν καθε απολυτως συγκλινουσα σειρα στο X είναι συγκλινουσα

Αποδ

(⇒): Χρήση της ανισότητας

$\|\sum_{i=1}^{m} x_i\| \leq \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|$ και το κρ. Cauchy για τον $\mathbb{R}$ και το X

(⇐): Έστω η βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ εν X. Επαγωγικά κατασκευάζουμε μια υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) τ.ω. $\|x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\| < \frac{1}{2^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

[Επαγωγική κατασκευή:
Επιλέγουμε ένα $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε το $\|x_l - x_m\| < \frac{1}{2}$, για κάθε $l, m \geq k_1$. Επιλέγουμε ένα $k_2 \in \mathbb{N}$ ώστε το $\|x_l - x_m\| < \frac{1}{2^2}$ για κάθε $l, m \geq k_2$. Αν έχουν επιλεγεί $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ τότε επιλέγουμε $k_{n+1} > k_n$ ώστε $\|x_l - x_m\| < \frac{1}{2^n}$, για κάθε $l, m \geq k_{n+1}$]

Θέτουμε λοιπόν $y_n = y_{k_{n+1}} - y_{k_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty$ απολύτως συγκλίνουσα

Άρα, από την υπόθεση θα είναι συγκλίνουσα. Δηλαδή, $\exists\, y \in X$ ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$

$\forall m \in \mathbb{N}$: $\sum_{n=1}^{m} y_n = x_{k_{m+1}} - x_{k_1}$ και για $m \to \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \lim_m (x_{k_{m+1}} - x_{k_1})$

Η υπακολουθία $(x_{k_{m+1}})_{m\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $y + x_{k_1}$

Άρα, (x_n) είναι βασική και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\Rightarrow (x_n)$ συγκλίνουσα.

Πρόταση

Έστω X χώρος με νόρμα

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

i) X διαχωρίσιμος

ii) $B(0,1)$ διαχωρίσιμη

iii) $S(0,1)$ —//—

iv) S_X διαχωρίσιμη με $\underbrace{S_X}_{\text{σφαίρα}} = \{x \in X : \|x\| = 1\}$

Απόδ

Ως γνωστό υπόχωρος διαχωρίσιμου μ.χ είναι διαχωρίσιμος

i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii), $\Rightarrow$ iv) ισχύουν

Θδο iii) $\Rightarrow$ i)

Έστω $S(0,1)$ διαχωρίσιμη

$\forall n \in \mathbb{N}$ $S(0,n) = n S(0,1)$, άρα $S(0,n)$ διαχωρισ.

αφού $x \xmapsto[\text{συνεχ.}]{} nx$

Εφόσον, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S(0,n)$ διαχωρίσιμος

Θδο iv) $\Rightarrow$ i)

Η συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \times S_X \to X$ τ/ω

$\varphi(\lambda, x) = \lambda x$ συνεχής συνάρτηση και επί

και ο $\mathbb{R} \times S_X$ διαχωρίσιμος

Επομένως, X διαχωρίσιμος

- $x \neq 0 \to x = \varphi(\|x\|, \frac{x}{\|x\|})$
- $x = 0$ και $y \in S_X$ $0 = \varphi(0, y)$

Άσκηση

Έστωσαν X, Y χώροι με νόρμα

$T, T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ $n = 1,2,\dots$ και $x, x_n \in X$ $n = 1,2,\dots$

τ/ω $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$ και $x_n \to x$

Τότε $T_n(x_n) \to T(x)$

Απόδ

Ειδικότερα για $x_n = x$, $\forall n \in \mathbb{N}$ το παραπάνω μας δηλώνει ότι αν $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$ τότε $T_n \to T$ κατά σημείο

$\|T_n(x_n) - T(x)\| = \|T_n(x_n) - T_n(x) + T_n(x) - T(x)\| =$

$= \|T_n(x_n - x)\| + \|(T_n - T)(x)\| \leq$

$\leq \underbrace{\|T_n\|}_{\text{συγκλ} \Rightarrow \text{φραγμ}} \cdot \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0} + \underbrace{\|T_n - T\|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|x\|}_{\text{σταθ}} \to 0$

Ασκηση

Εστω I απειρο συνολο και

$X = \{ x : I \to \mathbb{R}$ ωστε $\{ i \in I : x(i) \neq 0 \}$ πεπερασμενο$\}$

και $\|x\| = \sum_{i \in I} |x(i)|$.

Τοτε ο X με πραξεις κατα σημειο ειναι ενας γραμμικος χωρος και η $\|\cdot\|$ ειναι νορμα στον X αλλα $(X, \|\cdot\|)$ οχι χωρος Banach

ΛΥΣΗ

Εστω $J \subseteq I$ με $J = \{ i_1, i_2, i_3, \dots \}$ αριθμησιμο με $i_k \neq i_\lambda$ $\forall \kappa \neq \lambda$

Θεωρουμε $Y = \{ x \in X : x(i) = 0 \quad \forall i \in I \setminus J \}$

Ο Y ειναι γραμμικος υποχωρος του X

Οριζουμε την συναρτηση $T : (Y, \|\cdot\|) \to (c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$

τετοια ωστε $T(x) = (x(i_n))_{n \in \mathbb{N}}$

καλα ορισμενη, 1-1, επι

$\|T(x)\| = \|x(i_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x(i_n)| = \sum_{i \in I} |x(i)| = \|x\|$

Αρα ο T ειναι ισομετρικος, ισομορφισμος

τοτε αφου $(c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$ δεν ειναι χωρος Banach τοτε $(Y, \|\cdot\|)$ οχι χωρος Banach

Αρκει λοιπον νδο Y κλειστος $\leq X$

Ας ειναι (x_n) ακολουθια στον Y με $x_n \to x \in X$ και θδο $x \in Y$.

Καταρχην $\forall i \in I$: $x_n(i) \to x(i)$ και αρα

$\forall i \in I - J$: $x_n(i) = 0$ αρα και το $x(i) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in Y \Rightarrow Y$ κλειστος $\leq X$

β' τροπος (άμεσα)

οριζουμε $x_n(i) = \begin{cases} 0, & x \in I \setminus J \\ \frac{1}{2^{n_1}}, & x \in J \text{ και } i = i_{n_1} \text{ για } n_1 \leq n \end{cases}$

τοτε αυτη αποδεικνυεται οτι ειναι βασικη αλλα οχι συγκλινουσα στο X

Προταση

Αν X, Y είναι ισομετρικα ισομορφικοι χώροι με νόρμα, τοτε και οι X^*, Y^* είναι ισομετρικα ισομορφικοι

Αποδ

$\exists\ T: X \to Y$ ισομ. ισομορφισμος

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f\circ T"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Θετουμε $T^*: Y^* \to X^*$ τ/ω

$T^*(f) = f \circ T$ καλά ορισμένος αφου η σύνθεση γρ. τελεστων είναι γραμ. τελεστης

T^* γραμμικη (προφανές)

T^* επί διοτι για $g \in X^*$ τοτε για $f = g\circ T^{-1} \in Y^*$ και $T^*(f) = g$

και $\forall f \in Y^*$:

$\|T^*(f)\| = \|f\circ T\| =$

$= \sup\{f(T(x)) : x \in X, \|x\| \le 1\} =$

$= \sup\{f(y) : y \in Y, \|y\| \le 1\} = \|f\|$

Βασική Προταση

Εστω X, Y χωροι με νορμα, $T: X \to Y$ γραμ. τελεστης, $S_Y = \{y \in Y : \|y\| = 1\}$

Τα ακολουθα είναι ισοδύναμα

i) T συνεχής

ii) $T^{-1}(S_Y)$ κλειστο

iii) $0 \notin \overline{T^{-1}(S_Y)}$

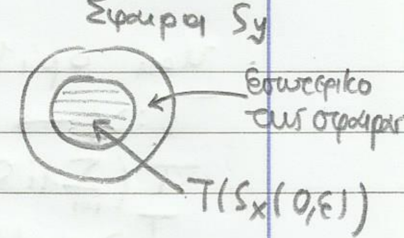
Αποδ

i) $\Rightarrow$ ii) προφανως αφου καθε συνεχής αντιστρεφει κλειστά σε κλειστά

ii) $\Rightarrow$ iii) $T(0_X) = 0_Y \notin S_Y \Rightarrow 0_X \notin T^{-1}(S_Y) = \overline{T^{-1}(S_Y)}$

iii) ⇒ i) $0 \notin \overline{T^{-1}(S_y)}$ τότε $\exists \varepsilon > 0 : S_x(0,\varepsilon) \cap T^{-1}(S_y) = \emptyset$

Τοτε, $T(S_x(0,\varepsilon)) \cap S_y = \emptyset$ (1)



Θδο $T(S_x(0,\varepsilon)) \subset S_Y(0,1)$ (2)

Εστω ότι δεν ισχυει αυτο

αρα $\exists x \in S_x(0,\varepsilon)$ με $T(x) \notin S_y(0,1)$ δηλ. να ισχυει οτι $\|T(x)\| \geq 1$.

Τοτε $\left\| \frac{x}{\|T(x)\|} \right\| = \frac{1}{\|T(x)\|} \|x\| \leq \|x\| < \varepsilon$ αφου είναι στη σφαίρα μέσα

Τοτε εκ της (1) $T\left(\frac{x}{\|T(x)\|}\right) \notin S_y \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{T(x)}{\|T(x)\|} \notin S_y$ ατοπο

Αρα, ισχυει η σχεση (2)

Ετσι, $\forall x \in X$ με $x \neq 0$ ένα διανυσμα που σχετιζεται με το x και εχει νορμα πιο μικρη του ε είναι το $\frac{\varepsilon}{2\|x\|} x$ διοτι $\left\| \frac{\varepsilon}{2\|x\|} x \right\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Τοτε, $\frac{\varepsilon}{2\|x\|} x \in S_x(0,\varepsilon) \overset{(2)}{\Longrightarrow} \left\| T\left(\frac{\varepsilon}{2\|x\|} x\right) \right\| < 1$

$\Rightarrow \|T(x)\| < \frac{2}{\varepsilon} \cdot \|x\| \Rightarrow T$ φραγμ. γραμ. τελεσ.

Επομένως, T συνεχής.

ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΝΟΡΜΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ

(ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο)

Προταση / Θεώρημα

Κάθε χώρος X με νορμα με διασταση n Θδο είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^n$ ως προς τη νορμα $\|\cdot\|_2$. (και αρα X χωρος Banach)

Αποδειξη

Εστω $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ Hamel βάση του X

και ορίζουμε τον τελεστή
$T: X_n \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ τ.ω
$T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$
T γραμμικός τελεστής, 1-1, και επί
Αρκεί νδο T και T^{-1} συνεχείς
$T^{-1}: (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to X_n$ τ.ω
$T^{-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ συνεχής λόγω της
συνέχειας των πράξεων $(\cdot, +)$ στον X
Θδο T συνεχής.
Από την προηγούμενη βασική πρόταση
$S := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ κλειστό & φραγμένο $\subseteq \mathbb{R}^n$
άρα S συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}^n$
Εφόσον T^{-1} συνεχής $\Rightarrow T^{-1}(S)$ συμπαγές $\subseteq X$
Άρα, $T^{-1}(S)$ είναι κλειστό στο X
και από την προηγούμενη βασική πρόταση
ο T συνεχής.
Επομένως, T είναι ομοιομορφισμός